I. Sens de la notation $\sum$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Le membre de gauche sera appelé forme développée de la somme et le membre de droite forme compactée

Ecrire sous forme développée les sommes suivantes et les calculer :

1. $\sum\limits_{k=1}^{5} (k+2)$
2. $\sum\limits_{k=1}^{4} \frac{1}{k}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{6} k\,(k+1)$
4. $\sum\limits_{k=1}^{4} \frac{(k+1)}{k}$

Ecrire sous forme compactée les sommes suivantes :

1. $0+2+4+6+8+10+12+14$
2. $1+3+5+7+9+11$
3. $1+4+9+16+25+36+49+64+81+100$
4. $0+3+6+\ldots+144$
5. $4+8+12+\ldots+4n$

II. Une somme classique : la somme des entiers consécutifs

Depuis la première, on connaît la simplification de

$$S_n = 1+2+3+...+n$$

1. Ecrire S_n sous forme compacte et en rappeler la simplification.
   Calculer S_{2017}
2. Démontrer la formule précédente grâce à un raisonnement par récurrence.

III. Linéarité de la somme

1. Propriété importante

   $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (\alpha.a_k + \beta.b_k) = \alpha.\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta.\sum_{k=1}^{n} b_k, \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta \text{ des constantes indépendantes de } k}$$

2. En utilisant la partie II. et la linéarité de la somme, calculer $P = 2+4+6+\ldots+2018$
   En déduire $I = 1+3+5+\ldots+2015$
3. Retrouver I par une **autre** méthode.
4. S'inspirer des questions précédentes pour calculer $S = 1+4+7+\ldots+2017$
5. *Un autre exemple d'application*
   (a) Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}^{\star} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$
   (b) En déduire la somme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)}$